**第六周习题课 空间曲面，曲线，Taylor公式**

**一．几何应用1. 空间曲面**

****

**(1)空间曲面的表达式**

显函数表示： 

隐函数表示: 

参数表示：

**(2)空间曲面的切平面与法线**

* 空间曲面由显函数表示，设 ，空间曲面过切平面方程为



法线方程是 

法向量为　　　　　　　　

空间曲面存在切平面的条件：若曲面由显函数表示在点可微, 则曲面在点有不平行轴的切平面.

* 若曲面由隐函数表示, 曲面过切平面方程为



法线方程为



法向量　　　　　　　

问题：**条件是什么？**

* 若曲面由参数表示：，其切平面为



或



法线方程为　　　　

法向量　　　　　　　

问题：**条件是什么？**

1. 求曲面:上切平面与直线平行的切点的轨迹。

解: (1) 直线的方向：.

切点为处曲面的法向：.

(2)所求轨迹：,

轨迹为空间曲线：

1. 证明球面与锥面正交.

证明 所谓两曲面正交是指它们在交点处的法向量互相垂直.

记

曲面上任一点处的法向量是

 或者

曲面上任一点处的法向量为.

设点是两曲面的公共点，则在该点有



即在公共点处两曲面的法向量相互垂直，因此两曲面正交.

1. 过直线作曲面的切平面，求该切平面的方程．

解：设切平面过曲面上的点，则切平面的法向量为



过直线的平面可以表示为



其法向量为 　　　　　　　　　

　　　　　　　　　　（１）

是曲面上的点，

　　　　　　　　　　　（２）

　　　　（３）

联立（１），（２），（３），解得，或，

切平面方程为

，或

1. 通过曲面上点的切平面（ B ）

（）通过轴； （）平行于轴；

（）垂直于轴； （），，都不对.

解题思路 令.则在其上任一点的法向量为



于是在点的法向量为



因此, 切平面的方程为. 在的法向量垂直于轴，从而切平面平行于轴．但是由于原点不在切平面，故切平面不含轴.

1. 已知可微，证明曲面上任意一点处的切平面通过一定点，并求此点位置．
2. 曲面由方程确定, 试证明：曲面*S*上任一点的法线与某定直线相交。

证明: 曲面上任意一点的法线为



设相交的定直线为, 与法线向交:

不平行于





只要取即可.

1. 求过直线且与曲面相切的平面的方程.

解：直线L平面F可表示为 ，设曲面为G

则相切处有

解得

因此切平面方程为 或

1. 在椭球面上求一点，使椭球面在此点的法线与三个坐标轴的正向成等角。

解：椭球面在此点的法线矢量为，设该点为，则有

该点坐标为

二．**空间曲线的切线和法平面**

**(1)空间曲面的表达式**

* 空间曲面的参数方程: 

参数方程又可以写作 

* 空间曲线的交面式：一条空间曲线，可以看作通过它的两个曲面与的交线，若设的方程为，的方程为，则的方程是



**(2)空间曲线的切线与法平面**

* 空间曲面的参数方程表示，其切线为　　

切向量为：　　　　　　　　　　

法平面为：　　　　 

* 空间曲线的交面式表达方式，其切线为



切向量为：　　

法平面为：



1. 求螺线 ；,在点 处的切线与法平面.

解 由于点对应的参数为，所以螺线在处的切向量是



因而所求切线的参数方程为 

法平面方程为 .

1. 求曲线 ,在点处的切线方程.

解: 取，，则 

所以曲线在处的切向量为 ，

于是所求的切线方程为 

1. 设曲线，求曲线上一点，使曲线在该点的切线平行于平面．

解：曲线的切线方向为．曲线在该点的切线平行于平面可知





所求的点为．

**三．Taylor公式**

1. 函数  在  点的二阶Taylor多项式为 。

【答案】

1. 函数在点的带Lagrange余项的Taylor展开式为

。

【答案】

1. 二元函数  在点  处的二阶Taylor多项式为 。

【答案】



1. 在点邻域内确定隐函数．求在原点的带Peano余项的二阶Taylor公式．

【解】



在原点的带Peano余项的二阶Taylor公式为